• Bu teorem en genel halde de doğrudur. Yukarıdaki şartlar altında (4.21) eşitliğine **Cauchy değişmezlik kuralı** denir.

4.22. Örnek. $y = f(x) = x^2$, $g(y) = y^3$, $x_0 = 2$, ve $dx = 0.2$ için 4.36 Teoremini doğrulayınız.

Çözüm : Verilenlere göre

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = 4, \quad dy = f'(x_0)dx = 2.2.0,2 = 0,8$$

ve

$$f'(x) = 2x, \; g'(y) = 3y^2$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}(dg_{y_0} \circ df_{x_0})(dx) &= dg_{y_0}(df_{x_0}(dx)) = g'(f'(x_0)dx) = g'(4).0,8 \\ &= 3.4^2.0,8 = 38,4\end{aligned}$$

dür. Diğer taraftan $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^6$ olup

$$dh(x_0; dx) = h'(x)dx = 6.2^5.0,2 = 38.4$$

olarak aynı değerdir. •

4.2. PROBLEMLER

4.2.1. Aşağıdaki bileşke fonksiyonların kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $u = xy$ olmak üzere $z = f(u)$, b) $u = x^2 + y^2$ olmak üzere $z = f(u)$

c) $u = ax + by$, $v = cx + dy$ olmak üzere $z = f(u, v)$

d) $u = x + y$, $v = x - y$ olmak üzere $z = f(u.v) = 2uv$

4.2.2. $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ olmak üzere $z = f(u, v)$ fonksiyonu veriliyor. z_{xy} türevini hesaplayınız.

4.2.3. $u = x + y$, $v = x - y$ olmak üzere $z = f(u, v) = 2uv + u$ fonksiyonunun z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy} türevlerini hesaplayınız. Bu türevlerin $(x_0, y_0 = (1, 2)$ noktasındaki değerlerini hesaplayınız.

4.2.4. $u = xy$, $v = 2xy - x$, $w = x + y$ ve $z = f(u, v, w) = 2uvw + uv$ ise z_x ve z_y türevlerinin $(x_0, y_0 = (1, 1)$ noktasındaki değerlerini bulunuz.

4.2.5. Aşağıda verilenlere göre $h = g \circ \mathbf{f}$ bileşke fonksiyonunun belirtilen türevlerini hesaplayınız.

(a) $\left.\begin{array}{l} u = f_1(x) = 3x \\ v = f_2(x) = x^2 + 1 \end{array}\right\}$ ve $g(u, v) = u + u^2 v$ ise $x_0 = -1$ de dh/dx 'i bulunuz ($\mathbf{f} = (f_1, f_2)$).

(b) $\left.\begin{array}{l} u = f_1(x) = x^2 \\ v = f_2(x) = (\pi/2)(x - 1) \\ w = f_3(x) = 2x - 3 \end{array}\right\}$ *ve* $g(u, v, w) = u^2 \cos(vw)$ *ise* $x_0 = 2$ de dh/dx 'i bulunuz.

(c) $u = f(x, y) = x^2 y - 3y^3$ *ve* $g(u) = e^{u^2}$ ise $(x, y) = (2, 1)$ de $\partial h/\partial x$ ve $\partial h/\partial x$ 'yi bulunuz.

(d) $\left.\begin{array}{l} u = f_1(x, y, z) = 2x + 3y + z \\ v = f_2(x, y, z) = xy \log z \end{array}\right\}$ *ve* $g(u, v) = u \tan^{-1} v$ ise $(1, 1, e)$ için $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial y$ *ve* $\partial h/\partial z$ yi bulunuz.

4.2.6. Problem 5 deki türevleri, $h = g \circ \mathbf{f}$ bleşke fonksiyonunu bağımsız değişken(ler) cinsinden yazarak hesaplayınız.

4.2.7. x, y, z, r ve θ nın bir biri ile olan irtibatı

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}, \quad z = f(x, y)$$

denklemleri ile verilmiştir. Gerekli türevlerin mevcut olduğunu farzedelim. $r \neq 0$ olmak üzere

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2$$

olduğunu gösteriniz.

4.2.8. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ise Problem 7) deki tekniği kullanarak

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

olduğunu gösteriniz.

4.2.9. f_1, f_2 ve g nin $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$ ve $z = g(u, v)$ denklemleri ile tanımlandığını farzedelim. Aşağıdaki türevleri hesaplamak için zincir kuralını kullanınız.

$$\text{a)}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad \text{b)}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

4.2.10. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen kısmî diferensiyel denklemi sağladığını gösteriniz (Burada gerekli türevlerin açık bir alt kümede mevcut olduğunu farzediyoruz).

$a)\ F(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax),$	$F_{xx} = a^2 F_{yy}.$
$b)\ z = f(x-ct),$	$\frac{\partial z}{\partial t} + c\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$
$c)\ z = f(\frac{x}{y}),$	$xz_x + yz_y = 0.$
$d)\ F(s,t) = f(s^2-t^2, t^2-s^2),$	$tF_s + sF_t = 0.$
$e)\ z = \cos(x+y) + \cos(x-y),$	$z_{xx} - z_{yy} = 0.$
$f)\ z = e^{kx}\cos(ky),$	$z_{xx} + z_{yy} = 0$
$g)\ z = yf(x^2-y^2),$	$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$
$h)\ z = f(x-ct),$	$\frac{\partial z}{\partial t} + c\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

4-2.11. $f(x,y)$ fonksiyonu için $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y) = 0$ ise f ye harmonik (fonksiyon) denir . f harmonik ise $f(x^2-y^2, 2xy)$ nin de harmonik olduğunu gösteriniz.

4-2.12. Bir z büyüklüğü, x ve y nin bir fonksiyonu yani $z = f(x,y)$ veya u ve v nin bir fonksiyonu yani $z = g(u,v)$ olarak ifade edilebilir. Bu iki koordinat sistemi arasında

$$x = u+v, \quad y = u-v$$

bağıntısı vardır.

a) Zincir kuralını kullanarak z_u ve z_v türevlerini z_x ve z_y cinsinden ifade ediniz.

b) a) şıkkında bulduğunuz denklem sistemini z_x ve z_y 'ye göre çözünüz.

c) b) şıkkında elde ettiğiniz ifadenin, u ve v nin x ve y 'ye göre çözülerek zincir kuralının uygulanması sonucunda elde edilen ifade ile aynı olduğunu gösteriniz.

4-2.13. $x, y, t \in \mathbb{R}$ ve n tam sayısı için $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ ise f ye n. dereceden homogendir denir. f, n. dereceden homogen ise her $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$a)\ xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = nf(x,y)$$
$$b)\ x^x f_{xx}(x,y) + 2f_{xy}(x,y) + y^2 f(x,y) = n(n-1)f(x,y)$$

olduğunu gösteriniz.

4.2.14. Kenarı x olan bir küpün (zamana göre) kenarının değişme oranı

2 *cm/dakika* dır. Küpün kenarı 4 *cm.* olduğunda hacminin artma oranını (artma hızını) bulunuz.

4.2.15. Bir açının radyan ölçümü x, derece ölçümü t° olsun. Bu takdirde

$$x = \frac{\pi}{180}t^\circ$$

dir. $y = \sin x$ ise dy/dt türevini hesaplayarak açıları radyan cinsinden ölçmenin matematikte neden daha uygun olduğunu açıklayınız.

4-2.16. $\mathrm{f} = (f_1, , f_2) : \mathbb{R}^2_{xy} \to \mathbb{R}^2_{uv}$

$$\mathrm{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u, v)$$

ve $g : \mathbb{R}^2_{uv} \to \mathbb{R}$,

$$z = g(u, v) = 3u - v^2$$

olarak tanımlanıyor. $h = g \circ \mathrm{f}$ ise $i = 1, 2$ için $df_i(3, 1; 1, -2)$ yi bulunuz.

$$dg_{(8,6)}(df_1, df_2) = dh_{(3,1)}(1, -2)$$

veya

$$\left[dg_{(8,6)} \circ d\mathrm{f}_{(3,1)}\right](1, -2) = dh_{(3,1)}(1, -2)$$

olduğunu göstererek 4.21. Teoremini doğrulayınız. •

4-3. Yönlü türev, gradyen vektör ve seviye eğrileri

Tek değişkenli fonksiyonun tanım kümesindeki x_0 noktasına sağdan ve soldan olmak üzere en fazla iki yolla yaklaşılabilir. Bu durumda $f'(x_0)$ türevi ile $f'_+(x_0)$ *sağ* ve $f'_-(x_0)$ *sol türev* kavramları söz konusu olur. Çok değişkenli fonksiyonlarda durum oldukça farklıdır. Bu halde p_0 noktasına çok farklı yönlerden yaklaşılabilir ve her bir halde farklı $f(p) - f(p_0)$ değişimleri elde edilebilir. Bu değişimler $\|p - p_0\|$ 'a bağlı olduğu kadar p_0 'a yaklaşım yönüne de bağlıdır. Hatırlanacağı gibi $f_x(x, y)$ kısmi türevi, (x, y) nin, x-eksenine paralel $y = b$ sabit doğrusu boyunca hareket ettiğinde $f(x, y)$ nin değişim oranı; $f_y(x, y)$ ise (x, y) nin, y-eksenine paralel $x = a$ sabit doğrusu boyunca hareket ettiğinde $f(x, y)$ nin değişim oranıdır. Benzer şekilde f_x, f_y ve f_z kısmi türevleri (x, y, z) nin x-, y- ve z-eksenlerine paralel hareket ettiğinde f nin değişim oranlarıdır. Âdi türevin bu genelleştirmesi bir çok gaye için yeterli olmakla beraber, herhangi bir yönde veya özel bir yönde